

## **Исследование комплексных спектров сложных сигналов в базисе преобразования Меллина**

Классическая теория обнаружения сигналов на фоне шумов хорошо разработана целым рядом российских и зарубежных ученых [1, 3, 5, 7-10]. В их работах, в основном, рассматриваются сигналы, имеющие базу порядка единиц. Для сигналов с большой базой разработаны теоретические основы обнаружителей сигналов, носящих название сложных. Теория обнаружения сложных сигналов на фоне помех развита в работах В.Б. Пестрякова, Я.Д. Ширмана, Ю.С. Лезина, Д.Б. Вакмана, Г. Ван-Триса.

Все методы обнаружения сигналов на фоне шумов объединяет единая методология обнаружения – нахождение путем синтеза и анализа

информативных признаков контраста, отличающих сигналы от шума [4: 340]. В качестве контраста может служить максимум отношения сигнал/шум или различия в автокорреляционных функциях сигналов [2: 64].

Наиболее широкое применение на практике нашли спектральные методы, основанные на интегральном преобразовании Фурье (ПФ) анализируемых сигналов. Это преобразование широко применяется при проведении аудита технических каналов утечки электромагнитных излучений. Если структура сложного сигнала неизвестна, то ПФ малоэффективно для измерения таких излучений, но можно использовать другие базисы, например, базис интегрального преобразования Меллина (ПМ) [11-13].

Проведем исследование свойств амплитудных спектров широкополосных сигналов (фазоманипулированных) в базисе ПМ для нахождения информативных признаков, позволяющих обнаружить фазоманипулированный сигнала на фоне шума.

Рассмотрим спектры Меллина на примере кодов Баркера. Для 13-значного кода Баркера код изменения фаз имеет вид:

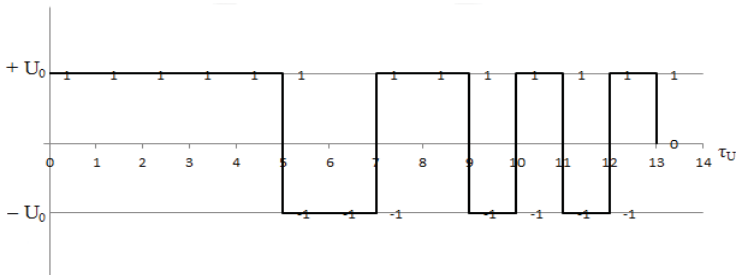
1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1. 1. 1. -1 1. -1. 1.

Огибающая такого сигнала показана на рис. 1, где

+U<sub>0</sub> – положительное значение физического сигнала;

–U<sub>0</sub> – отрицательное значение физического сигнала;

τU – длительность элементарного бита сигнала.



**Рис. 1. Сигнал 13-значного кода Баркера**

Преобразование Меллина в пределах  $\mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot \tau_u$ ,  $\mathbf{b} = (\mathbf{n} + 1)\tau_u$ ;  $\mathbf{n} = 1, 2, \dots, 13$  запишется в виде интегрального преобразования Меллина,

$$M(S) = \int_0^{\infty} f(x)t^{s-1}dt, \quad (1)$$

где  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  – входной сигнал;  $\mathbf{t}^{s-1}$  – ядро ПМ;

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{j}u, \boldsymbol{\sigma} \in (\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2), u \in (-\infty, \infty). \quad (2)$$

Для нахождения спектра Меллина 13-позиционного кода Баркера необходимо выполнить следующие операции:

Найти действительную  $\text{Re}\{H(s)\}$  часть  $M(s)$  и мнимую часть  $\text{Im}\{M(s)\}$ .

Вычислить модуль  $|M(S)|$  по формуле:

$$|M(S)| = \sqrt{\text{Re}\{M(S)\}^2 + \text{Im}\{M(S)\}^2}. \quad (3)$$

Равенство Парсеваля для  $|M(S)|$  выполняется при  $\sigma = \frac{1}{2}$ . Тогда для (2) запишем действительную и мнимую части  $M(S)$ :

$$\text{Re}\{U\} = \frac{1}{(0.25 + u^2)} (0.5\sqrt{b} \cos u \ln b - 0.5\sqrt{a} \cos u \ln a + u\sqrt{b} \sin u \ln b - u\sqrt{a} \sin u \ln a),$$

$$\text{Im}\{U\} = \frac{1}{(0.25 + u^2)} (0.5\sqrt{b} \sin u \ln b - 0.5\sqrt{a} \sin u \ln a - u\sqrt{b} \cos u \ln b - u\sqrt{a} \cos u \ln a),$$

где  $a$  и  $b$  принимают последовательно значения нижнего и верхнего пределов интегрирования и попарно равные:  $a=0, b = 5\tau_U; a = 5\tau_U, b = 7\tau_U; a = 7\tau_U, b = 9\tau_U; a = 9\tau_U, b = 10\tau_U; a = 10\tau_U, b = 11\tau_U; a = 11\tau_U, b = 13\tau_U$ .

Теорема: Пусть финитная функция  $S_1 t = k-1 \quad s_t$  имеет ограниченные изменения в кольце  $\sigma_1 \leq k \leq \sigma_2$ ,  $\sigma_1, \sigma_2$  – кольца сходимости и через равные интервалы времени  $\tau$  ее огибающая изменяется на величину  $+1$  при фазе равной  $\pi$  и на величину  $-1$  при фазе равной  $-\pi$ , фазы изменяются по псевдослучайному закону, тогда амплитудный спектр  $S_t$  в базисе интегрального преобразования Меллина имеет максимум при  $S = \sigma + ju$ .

Доказательство. Модель  $S(t)$  представим в математической записи как

$$s(t) = \sum_{n=1}^N A_0(n\tau);$$

$$\forall A_0 = \begin{cases} +1 & \text{при } \varphi = \pi \\ -1 & \text{при } \varphi = -\pi; \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

Преобразования Меллина запишется в виде:

$$\mathbf{M}(s) = \sum_{n=1}^N A_0(n\tau) \int_{-n-1\tau}^{-n\tau} t^{s-1} dt.$$

ИЛИ

$$\mathbf{M}(s) = \sum_{n=1}^N \frac{A_0(n\tau)\tau^s(n^s - (n-1)^s)}{s}.$$

Равенство выполняется при , поэтому после преобразования получим реальную  $\mathbf{R}_e\{\mathbf{M}(U)\}$  и мнимую  $\mathbf{I}_m\{\mathbf{M}(U)\}$  составляющие  $\mathbf{M}(s)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e\{\mathbf{M}(U)\} &= \sum_{n=1}^N \frac{A_0(n\tau)\sqrt{\tau}}{0,25 + u^2} ((0,5 \cos u \ln \tau + u \sin u \ln \tau) \\ &\cdot (\sqrt{n} \cos u \ln n\tau + \sqrt{n-1}\tau \cos u \ln(n-1)) - (0,5 \sin u \ln \tau - u \cos u \ln \tau) \\ &\cdot (\sqrt{n} \sin u \ln n\tau - \sqrt{n-1} \sin u \ln(n-1)\tau)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_m\{\mathbf{M}(U)\} &= \sum_{n=1}^N \frac{A_0(n\tau)\sqrt{\tau}}{0,25 + u^2} ((0,5 \cos u \ln \tau + u \sin u \ln \tau) \\ &\cdot (\sqrt{n} \sin u \ln n\tau - \sqrt{n-1} \sin u \ln(n-1)\tau) + (0,5 \sin u \ln \tau - u \cos u \ln \tau) \\ &\cdot (\sqrt{n} \cos u \ln n\tau - \sqrt{n-1} \cos u \ln(n-1)\tau)). \end{aligned}$$

Тогда для квадрата модуля запишем:

$$|\mathbf{M}(U)|^2 = \left[ \sum_{n=1}^N \frac{A_0(n\tau)\sqrt{\tau}}{(0,25 + u^2)} \left( \mathbf{R}_e\{\mathbf{M}(U)\} + \mathbf{I}_m\{\mathbf{M}(U)\} \right) \right]$$

Или

$$\begin{aligned} |\mathbf{M}(U)|^2 &= \sum_{n=1}^N \frac{A_0^2(n\tau)\tau}{0,25 + u^2} (\mathbf{R}_{en}^2\{\mathbf{M}(U)\} + \mathbf{I}_{mn}^2\{\mathbf{M}(U)\}) \\ &+ \sum_{h=n-1}^N \sum_{h=n+1}^N \frac{A_n A_h \tau^2}{(0,25 + u^2)} (\mathbf{R}_{en}\{\mathbf{M}(U)\} \cdot \mathbf{I}_{mh}\{\mathbf{M}(U)\}) \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{A_{0n}^2(n\tau)\tau}{(0,25 + u^2)^2} \mathbf{R}_{en}^2\{\mathbf{M}(U)\} + \sum_{n=1}^N \frac{A_{0n}^2(n\tau) \cdot \tau}{(0,25 + u^2)^2} \cdot \mathbf{I}_{mn}^2\{\mathbf{M}(U)\}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\mathbf{u} \rightarrow \infty$

$$\lim_{\mathbf{u} \rightarrow \infty} (\mathbf{M}(\mathbf{U}))^2 = 0$$

При  $\mathbf{U} \rightarrow 0$  имеем

$$\lim_{\mathbf{U} \rightarrow 0} |\mathbf{M}(\mathbf{U})|^2 = \sum_{n=1}^N \frac{A_0^2(n\tau)\tau}{(0,25)^2} \mathbf{R}_{e_n}^2\{\mathbf{M}(0)\} + \sum_{n=1}^N \frac{A_0^2(n\tau)\tau}{(0,25)^2} \mathbf{I}_{m_n}^2\{\mathbf{M}(0)\}$$

Из этих пределов следует, что максимум спектра Меллина будет достигаться при нулевой переменной  $U$  ( $U=0$ ).

Подставив значения  $a$  и  $b$ , получим. Для реальных частей:

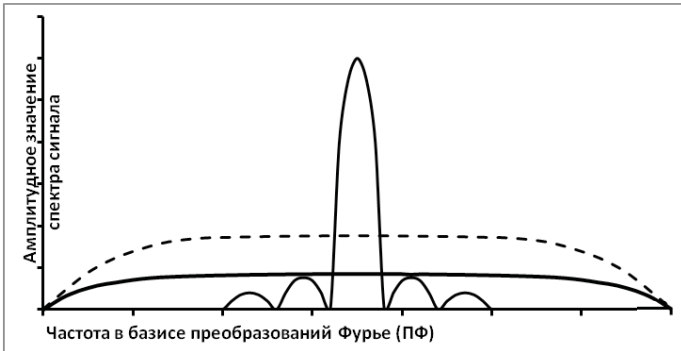
$$\begin{aligned} \mathbf{R}_e\{\mathbf{M}(U)\} = & \mathbf{R}_{e_1}\{\mathbf{M}(U)\} - \mathbf{R}_{e_2}\{\mathbf{M}(U)\} + \mathbf{R}_{e_3}\{\mathbf{M}(U)\} - \mathbf{R}_{e_4}\{\mathbf{M}(U)\} + \mathbf{R}_{e_5}\{\mathbf{M}(U)\} \\ & - \mathbf{R}_{e_6}\{\mathbf{M}(U)\} + \mathbf{R}_{e_7}\{\mathbf{M}(U)\}, \end{aligned}$$

соответственно для мнимой составляющей:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_m\{\mathbf{M}(U)\} = & \mathbf{I}_{m_1}\{\mathbf{M}(U)\} - \mathbf{I}_{m_2}\{\mathbf{M}(U)\} + \mathbf{I}_{m_3}\{\mathbf{M}(U)\} - \mathbf{I}_{m_4}\{\mathbf{M}(U)\} + \mathbf{I}_{m_5}\{\mathbf{M}(U)\} \\ & - \mathbf{I}_{m_6}\{\mathbf{M}(U)\} + \mathbf{I}_{m_7}\{\mathbf{M}(U)\} \end{aligned}$$

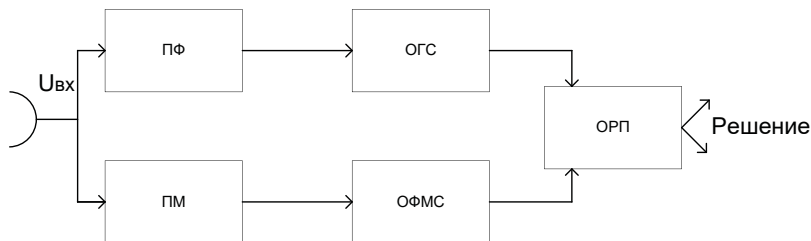
$$\text{Тогда } |\mathbf{M}(U)| = \sqrt{\mathbf{R}_e^2\{\mathbf{M}(U)\} + \mathbf{I}_m^2\{\mathbf{M}(U)\}}.$$

На рис. 2. показаны спектры широкополосного фазоманипулированного и узкополосного гармонических сигналов в базе интегрального ПФ.



**Рис. 2 Амплитудные спектры узкополосного и широкополосного сигналов в базе преобразований Фурье**

На рис. 3. приведена блок-схема комбинированного двухбазисного обнаружителя узкополосного сигнала в базе ПФ и широкополосного фазоманипулированного сигнала в базе ПМ.



**Рис. 3. Структурная схема обнаружения сигналов в базе ПФ и ПМ**

ПФ – преобразование Фурье;

ПМ – преобразование Меллина;

ОГС – обнаружитель гармонических сигналов;

ОФМС – обнаружитель фазоманипулированных сигналов.

ОРП – объединенное решающее правило.

Входной сигнал, представляющий собой аддитивную смесь сигнала и шума, поступает на вход комбинированного обнаружителя сигналов. Если в смеси присутствует квазигармонический сигнал, то срабатывает верхняя структура, определяющая обнаружитель квазигармонического сигнала. Если в смеси присутствует фазоманипулированный сигнал, то срабатывает нижняя ветвь обнаружителя сложных сигналов. То есть комбинированный обнаружитель сигналов на фоне шумов с использованием комбинации преобразования Фурье и преобразования Меллина приводит к повышению эффективности обнаружения сигналов с малой и большой базами.

### **Библиографический список**

1. Акимов П.С., Евстратов Ф.Ф., Захаров С.И. и др. Обнаружение радиосигналов; под ред. А.А. Колосова. М.: Радио и связь, 1989. 288 с.
2. Батчаев И.З. Многокритериальная задача покрытия предфрактальных графов звездами ранговых типов: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Черкесск, 2004.
3. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. М.: Советское радио, 1972. 744 с.
4. Дровосекова Т.И., Сизов С.Б. Параллельные вычисления в приложении к задаче моделирования физических процессов // В мире научных открытий. 2014. № 6-1 (54). С. 338-349.
5. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Советское радио, 1956. 152 с.

6. Макаров А.М., Ермаков А.С. Оптимальный согласованный фильтр для обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной корреляционной функцией // Известия ЮФУ. Технические науки. 2015. № 11 (172). С. 42-54.
7. Мидлтон В. Введение в статистическую теорию связи. Т. 2. М.: Советское радио, 1962. 832 с.
8. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптации информационных систем. М.: Советское радио, 1977. 432 с.
9. Сосулин Ю.Г. Теория обнаружения и оценивание статистических сигналов. М.: Советское радио, 1978. 447 с.
10. Френкс Л. Теория сигналов: Пер с англ.; под ред. Д.Е. Вакмана. М.: Советское радио, 1974. 344 с.
11. Bertrand J., Bertrand P., Ovarlez J. The Mellin Transform. The Transforms and Applications Handbook: Second Edition. Ed. Alexander D. Poularikas. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000.
12. Ovarlez J., Bertrand P., Bertrand P. Computation of offline time – frequency distributions using the Fast Mellin transform. Proc IEEE – ICASSP. 1992.
13. Philippe Flajolet, Xavier Gourdon, Philippe Dullas. Mellin transforms and asymptotics: Harmonic sums. Theoretical Computer Science 144. pp. 3-38. 1995.
14. Vorobyev G.A., Ryndjuk V.A., Kozlov V.A., Makarov A.M. Probabilistic models of cryptographic systems and their applications // 2016 3rd International Conference on Digital Information Processing, Data Mining, and Wireless Communications, DIPDMWC 2016 3. 2016. С. 160-163.