

**Исследование математической модели
тригонометрически-логарифмических базисных
функций преобразования Меллина**

В работе проанализированы граничные условия, накладываемых на пределы изменения базисных функций ПМ и построения на их основе обобщенной модели ПМ для ее практических применений в решении задач математики, теории статистического обнаружения сигналов и в области остальных методов обработки информации.

Интегральное ПМ в виде прямого и обратного преобразования имеет вид:

прямое ПМ

$$M(S) = \int_0^{\infty} f(t)t^{S-1}dt \quad (1)$$

где $s = \sigma + ju; \sigma = 1/2; u \in (-\infty, \infty)$,

обратное ПМ

$$f(t) = \frac{1}{\pi j} \int_{1/2-ju}^{1/2+ju} M(S)t^{-S}ds, \quad (2)$$

где $j = \sqrt{-1}$

Базисные ядра K_{gr} ПМ равны

$$K_{gr} = t^{S-1} = t^{1/2+ju-1} = t^{-1/2}t^{ju} = \frac{e^{ju \ln(t)}}{\sqrt{t}},$$

или

$$K_{gr} = \frac{\cos(u) \ln(t)}{\sqrt{t}} + j \frac{\sin(u) \ln(t)}{\sqrt{t}}. \quad (3)$$

Соответственно модуль ядра

$$|K_{gr}| = \sqrt{\frac{\cos^2(u \ln(t)) + \sin^2(u \ln(t))}{t^2}} = \frac{1}{t}.$$

Аргумент $arg = -\arctan \frac{\sin(u \ln(t))}{\cos(u \ln(t))} = -\arctan(\tan(u \ln(t))) = -u \ln(t)$

Равенство Парсеваля

$$\int_a^b |M(S)|^2 ds = \int_a^b |f(t)|^2 dt \quad (4)$$

выполняется при реальной части S равной $1/2$ [1; 2]

Для дальнейшего анализа запишем (1) в виде

$$M(u) = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \cos(uln(t)) dt + j \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \sin(uln(t)) dt \quad (5)$$

Из (5), по определению, модуль $|M(u)|$ равен

$$|M(u)| = \sqrt{\left[\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \cos(uln(t)) dt \right]^2 + \left[\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \sin(uln(t)) dt \right]^2} \quad (6)$$

а аргумент

$$\Psi(u) = -\arctan \frac{\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \cos(uln(t)) dt}{\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \sin(uln(t)) dt} \quad (7)$$

Для дискретной модели ПМ имеем модуль $|M(u)|$ или амплитудный спектр

$$|M(u)| = \sqrt{\left[\Delta t \sum_{i=1}^N \frac{f(i\Delta t)}{\sqrt{i\Delta t}} \sin(u(i\Delta t)) \right]^2 + \left[\Delta t \sum_{i=1}^N \frac{f(i\Delta t)}{\sqrt{i\Delta t}} \cos(u(i\Delta t)) \right]^2} \quad (8)$$

где $N = T/\Delta t$, T – длительность финитной функции $f(t)$.

Как показали исследования, проведенные авторами работы, основную трудность модели представляет создание генератора базисных функций вида

$$\varphi(t) = \frac{\sin(uln(t))}{\sqrt{t}}$$

Определим два предела:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin(uln(t))}{\sqrt{t}} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(uln(t))}{\sqrt{t}} = 0$$

Исследуем нули функции $\varphi(t)$

$$\sin(uln(x)) = \pi n, \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

$$x_0 = e^{\frac{\pi n}{u}}, \text{ если } x > 1$$

$$x_0 = e^{-\frac{\pi n}{u}}, \text{ если } x < 1$$

Рассмотрим рисунок, изображающий один период $\phi(t)$, при $x < 1$

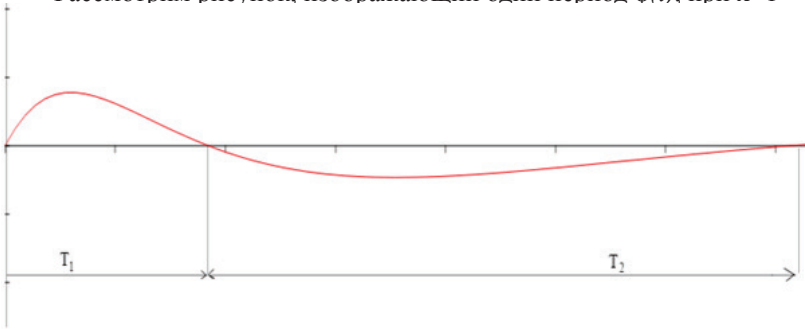


Рисунок 1. Период функции $\phi(t)$

Теорема 1. Для функции $\frac{\sin(ulnt)}{\sqrt{t}}$, при $t > 0, u \in (u_{max}, u_{min})$ при любом конечном u полупериоде все полупериоды функции будут сдвинуты на постоянную величину $e^{m\pi/u}, m = 1, 2, 3, \dots, M$.

Доказательство.

Из рис.1 видно, что полный период будет равен

$$T_{01} = T_1 + T_2$$

С другой стороны, для предыдущего полупериода запишем

$$T_1 = e^{\frac{\pi n}{u}} - e^{\frac{(n-1)\pi}{u}} \text{ и для последующего полупериода}$$

$$T_2 = e^{\frac{(n-1)\pi}{u}} - e^{\frac{(n-2)\pi}{u}},$$

тогда отношение T_2/T_1 получим

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{e^{\frac{(n-1)\pi}{u}} - e^{\frac{(n-2)\pi}{u}}}{e^{\frac{\pi n}{u}} - e^{\frac{(n-1)\pi}{u}}} = e^{\frac{\pi}{u}} \text{ или } T_2 = T_1 e^{\frac{\pi}{u}}, \text{ тогда для } T_{01} \text{ имеем}$$

$$T_{01} = T_1 + T_1 e^{\frac{\pi}{u}} = T_1 \left(1 + e^{\frac{\pi}{u}} \right)$$

Аналогично для отношения T_3/T_2 получим

$$\frac{T_3}{T_2} = e^{\frac{\pi}{u}},$$

$$T_{02} = T_3 + T_4 = T_1 e^{\frac{2\pi}{u}} + T_1 e^{\frac{3\pi}{u}} = T_1 e^{\frac{2\pi}{u}} (1 + e^{\frac{\pi}{u}}) = T_{01} e^{\frac{2\pi}{u}}$$

$$T_{0m} = T_{01} e^{\frac{m\pi}{u}}$$

ч.т.д.

Выразим $e^{\frac{m\pi}{u}}$ через рекурсию
 $U[m] = \rho U[m - 1],$

Примем $\rho = e^{\pi/u}$ за эталон, тогда
 $e^{\frac{m\pi}{u}} = e^{\frac{\pi}{u}} e^{\frac{(m-1)\pi}{u}}$

$$m = 1 e^{\frac{\pi}{u}} = e^{\frac{\pi}{u}} e^0 = \rho$$

$$m = 2 e^{\frac{2\pi}{u}} = e^{\frac{\pi}{u}} e^{\frac{\pi}{u}} = \rho\rho = \rho^2$$

$$\text{При } m = 3 e^{\frac{3\pi}{u}} = e^{\frac{\pi}{u}} e^{\frac{2\pi}{u}} = \rho\rho^2 = \rho^3$$

.....

$$m = e^{\rho^l} l = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, для генератора базисных функций необходимо вычислить одно значение $\rho = e^{\frac{\pi}{u}}$ для заданного u , а затем последовательным умножением вычислить все координаты нулей u -той гармоники.

В таблице 1 приведено сравнение вычисления нулей по приведенным формулам: прямой метод и рекурсивный метод. С точностью до 25 знака после запятой эти методы дают одинаковый результат. Для практических целей целесообразно использовать, как следует из результатов таблицы, рекуррентный, как наиболее экономичный.

Таблица 1

Координаты нулей функции $\varphi(t) < 1$ с точностью 25 знаков, вычисленные разными методами при $u=1$

n	Рекурсивное вычисление нулей $\prod_{j=-1}^n \frac{1}{\rho}$	Прямое вычисление нулей ρ^n
-1	0.0432139182637722497744177372	0.0432139182637722497744177372
-2	0.0018674427317079888144302129	0.0018674427317079888144302129
-3	0.000080699517570304599239205	0.000080699517570304599239205
-4	0.0000034873423562089954917753	0.0000034873423562089954917753
-5	0.0000001507017275390064610748	0.0000001507017275390064610748
-6	0.0000000065124121360799007282	0.0000000065124121360799007282
-7	0.0000000002814268457485552721	0.0000000002814268457485552721
-8	0.0000000000121615567094093084	0.0000000000121615567094093084
-8	0.0000000000005255485176006449	0.0000000000005255485176006449
-9	0.0000000000000227110106832409	0.0000000000000227110106832409
-10	0.0000000000000009814317593532	0.0000000000000009814317593532
-11	0.0000000000000000424115118302	0.0000000000000000424115118302
-12	0.0000000000000000018327676057	0.0000000000000000018327676057
-13	0.000000000000000000792010695	0.000000000000000000792010695
-14	0.000000000000000000034225885	0.000000000000000000034225885
-15	0.000000000000000000001479035	0.000000000000000000001479035
-16	0.000000000000000000000063915	0.000000000000000000000063915
-17	0.00000000000000000000000005	0.00000000000000000000000005

Рассмотрим экстремумы функции.

Первая производная функции $\varphi(t)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{\sin u \ln x'}{\sqrt{x}} = \frac{u \cos(u \ln x)}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sin(u \ln x)}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

Из чего следует, что экстремум будет находиться в такой точке x , для которой выполняется данное уравнение:

$$\frac{u \cos(u \ln x)}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sin(u \ln x)}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

Получение метода вычисления координат экстремумов диктует следующие преобразования:

$$\frac{ucos(ulnx)}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{sin(ulnx)}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$2ucos(ulnx) = sin(ulnx)$$

$$\frac{sin(ulnx)}{cos(ulnx)} = 2u$$

$$tg(ulnx) = 2u$$

$$ulnx = arctg(2u)$$

$$x = e^{\arctg(2u)/u + n\pi/u} \text{ для } n = \begin{cases} -1, -3, -5, \dots \text{ для } x < 1 \text{ и } \frac{sin(ulnx)}{\sqrt{x}} < 0 \\ -2, -4, -6, \dots \text{ для } x < 1 \text{ и } \frac{sin(ulnx)}{\sqrt{x}} > 0 \\ 1, 3, 5, \dots \text{ для } x > 1 \text{ и } \frac{sin(ulnx)}{\sqrt{x}} > 0 \\ 2, 4, 6, \dots \text{ для } x > 1 \text{ и } \frac{sin(ulnx)}{\sqrt{x}} < 0 \end{cases}$$

В таблице 2 отражены минимумы и максимумы $\varphi(x) = \frac{sin(uln(x))}{\sqrt{(x)}}$ для $u=10$

Таблица 2

Минимумы и максимумы $\varphi(x)$ на периоде (0,001,1)

Номер периода от единицы	минимум	максимум
1	0,850	0,621
2	0,454	0,331
3	0,242	0,177
4	0,129	0,094
5	0,069	0,050
6	0,037	0,027
7	0,020	0,014
8	0,010	0,008
9	0,006	0,004

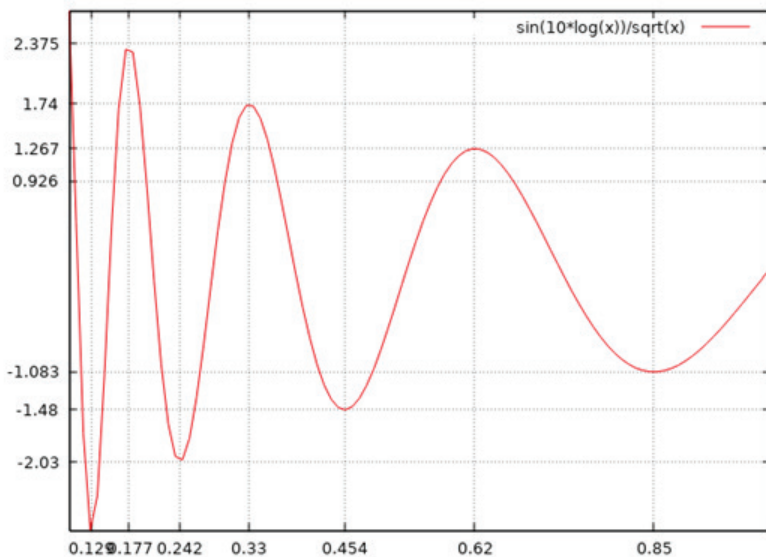


Рисунок 2. График минимумов и максимумов $\varphi(x)$ на периоде $(0,001,1)$

Для оптимизации вычислений можно преобразовать вычисление экстремумов к рекурсивному виду:

$$x_{extn} = e^{\arctg(2u)/u + n\pi/u} = e^{\arctg(2u)/u} \cdot e^{n\pi/u} = e^{\arctg(2u)/u} \cdot \rho^n$$

$$x_{extn+m} = x_{extn} \cdot e^{m\pi/u} = x_{extn} \cdot \rho^m$$

$$x_{extn-m} = x_{extn} \cdot e^{-m\pi/u} = \frac{x_{extn}}{\rho^m}$$

Или же, с соблюдением четности:

$$x_{maxn} = x_{maxn-1} \cdot e^{-2\pi/u} = \frac{x_{maxn-1}}{\rho^2}$$

Так же, имея координату x , при которой $\varphi(x)$ обращается в ноль, можно получить координаты точки экстремума справа от нее:

$$x_{extn} = x_{0n} \cdot e^{\frac{\arctg 2u}{u}}$$

В таблице 3 приведено сравнение вычисления нулей по приведенным формулам: прямой метод и рекурсивный метод. С точностью до 25 знака после запятой эти методы дают одинаковый результат. Для практических целей целесообразно использовать, как следует из результатов таблицы, рекуррентный, как наиболее экономичный.

Таблица 3

Координаты экстремумов функции $\varphi(t) < 1$ с точностью 25 знаков, вычисленные разными методами при $u=10$

n	Рекурсивное вычисление экстремумов $e^{\frac{\operatorname{arctg} 2u}{u}} \prod_{j=-1}^n \frac{1}{\rho}$	Прямое вычисление экстремумов $e^{\frac{\operatorname{arctg} 2u}{u}} \rho^n$
-1	0.850377022249623007165095626748	0.850377022249623007165095626748
-2	0.62111766545705862788824958958	0.62111766545705862788824958958
-3	0.453666014307688015014264038838	0.453666014307688015014264038838
-4	0.331358877687648688552999893043	0.331358877687648688552999893043
-5	0.242025415965917614604905271841	0.242025415965917614604905271841
-6	0.17677601512367406419807975046	0.17677601512367406419807975046
-7	0.12911767715918761154049847415	0.12911767715918761154049847415
-8	0.0943078988590208751229019656147	0.0943078988590208751229019656146
-8	0.0688827431137723421650505536578	0.0688827431137723421650505536578
-9	0.0503121409371118809960752023056	0.0503121409371118809960752023056
-10	0.0367481231328852444777990041919	0.0367481231328852444777990041919
-11	0.0268409280272463680589978351312	0.0268409280272463680589978351312
-12	0.0196046860613437618905412289472	0.0196046860613437618905412289472
-13	0.0143193154563693566903340823841	0.0143193154563693566903340823841
-14	0.0104588665433066430642113503385	0.0104588665433066430642113503385
-15	0.00763918426854981808431055676863	0.00763918426854981808431055676864
-16	0.00557968074716526658165282142453	0.00557968074716526658165282142453

Таким образом, в работе были обозначены особенности и законо-

мерности поведения функции $\frac{\sin(ulin(t))}{\sqrt{t}}$, позволяющие построить ее цифровую реализацию [3; 4; 5; 6].

Библиографический список

1. Oberhettinger F. Tables of Mellin Transforms. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. New York, 1974. 278 с.
2. Макаров А.М., Ермаков А.С. Оптимальный согласованный фильтр для обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной корреляционной функцией // Известия ЮФУ. Технические науки. 2015. № 11 (172). С. 42-54.
3. Bertrand J., Bertrand P., Ovarlez j. The Mellin Transform. The Transforms and Applications Handbook: Second Edition. Ed. Alexander D. Poularikas. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000.
4. Sheng Y., Arsenaault H. Experiments on pattern recognition using invariant Fourier

-Mellin descriptors // J. Opt. Soc. Am. 1986. № 3 (6). P. 885-887.

5. Gianni Pagnini, Yang Quon Chen. Mellin convolution for signal filtering and ITC application to the Gaussianization of Lewy noise. Proceedings of the ASME 2011 // International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE 2011, August 26-31, Washington DC, USA.
6. Шуванов Р.И. Распознавание образов на цифровых изображениях на основе теории инвариантов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки (моделирование в информатике). 2012. С. 158-165.