С.С. Постовалов, А.М. Макаров

Математические основы преобразования Меллина в теории анализа сигналов

В истории развития теории и приложений обработки сигналов на фоне шумов большую роль сыграли интегральные преобразования Фурье, Гильберта, Меллина. Их внедрение в теорию обогатило функциональные возможности теории сигналов, расширив область их применения. По-видимому, самой эффективной, оказалась возможность взаимоодозначного преобразования пространства переменной t в пространство другой переменной ω, что, например, породило спектральный анализ сигналов. В настоящее время различные методы спектральной инженерии стали рабочим инструментов инженеров и научных работников. Преобразование Гильберта позволило решить задачу нахождения комплексной огибающей широкого класса широкополосных сигналов. А это, в свою очередь, позволило использовать методы цифрового представления сигналов и методы цифровой обработки, что привел к созданию нового класса устройств обработки сигналов. В настоящее время имеются примеры применения интегрального преобразования Меллина для обработки сигналов методами, обеспечивающими максимальную инвариантность решающих правил к масштабным изменениям сигнала. В ряде работ рассмотрены математические основы ПМ, позволяющие обеспечивать его применение для обработки сигналов. Но, с другой стороны, результаты, полученные математиками не стали достоянием широкого круга инженеров-разработчиков из-за перегруженности математического аппарата специальными знаниями, а с другой стороны, результаты, полученные не математиками не обладают строгостью. Отсутствие работы, позволяющей рассмотреть теорию интегрального преобразования Меллина для области, связанной с теорией сигналов, тормозит его дальнейшее применение для решения возможных практических задач: обнаружение сигналов в условиях априорной неопределенности о его параметрах, оценки неизвестных параметров сигналов, распознавание образов, методы цифровой обработки больших данных и т. д.

Интегральные преобразования Фурье, Гоммеля и Меллина и теория обработки сигналов Пара интегральных преобразований задаются в виде прямого преобразования

$$M(s) = \int_x f(x)\, \theta(s, x)\, dx,\ x \epsilon X,$$

и обратного преобразования

$$f(x) = \int_s M(s)\, \theta^{-1}(x, s)\, ds,\ s \epsilon S, \qquad (2)$$

Где $\theta(s,x)$ – ядро прямого преобразования, $\theta^{-1}(s, x)$ – ядро обратного преобразования,

$x \epsilon X$ – область переменной x, где интеграл (1) существует.

То есть пара интегральных преобразований (1) и (2) представляет собой оператор отображения переменной x, при ее определении в области существования интеграла (1) X, в область переменной s, существующей в области интегрального (2) S.

Для теории обработки сигналов основное условие применения интегральных преобразований (1) и (2) заключается в выполнении равенства Парсеваля или неравенства Бесселя: мощность сигнала до преобразования равна его мощности после преобразования.

Математически это запишется в виде фундаментального неравенства

$$f(x) = \int_s M(s)\, \theta^{-1}(x, s)\, ds,\ s \in S, \qquad (3)$$

Где |.| – оператор модуля функции M(s) и f(x).

в теории интегральных преобразований (3) выполняется при равенстве смежных произведений

$$\big(M(s), P(s)\big) = \big(y(t), x(t)\big), \qquad (4)$$

где M(s), P(s) — преобразование от t.

В свою очередь, условие (4) будет верно, если ядра интегральных преобразований (1) и (2) будут самосопряженными

$$\theta(s,x) = \theta^*(x,s),$$

где символ * означает комплексно-сопряженную величину.

Таким образом, величина скалярного произведения (4) не изменяется при переходе области M(s) в область x(t).

Элементы математических основ теории интегральных преобразований. Классическое преобразование Меллина имеет вид

$$M(s) = \int_0^\infty f(t)\, t^{s-1} dt, s = \sigma + ju,$$

$$\sigma \in R^1, u \in (-\infty, \infty),$$

R1 — евклидово множество действительных чисел.

Обратное ПМ выражается следующим образом

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} M(s) t^{-s} ds$$

Запишем ядро прямого ПМ и обратного в виде

$t^{\sigma+ju}$ и $t^{\sigma-ju}$,

несложно показать, что их самосопряженность возможна лишь при $\sigma = \frac{1}{2}$, тогда ядро прямого ПМ равняется

$$M(p) = \int_0^\infty f(t) t^{p-1} dt \quad M(p) = \int_0^\infty f(t) t^{p-1} dt,$$

где p = 1/2+ju и, соответственно, для ПМ с самосопряженными ядрами имеем

$$M(p) = \int_0^\infty f(t)\, t^{p-1} dt \tag{5}$$

и

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{1/2 - j\infty}^{1/2 + j\infty} M(p)\, t^{-p} dp$$

Полученное выражение (5) — модифицированное ПМ для его применения в теории обработки сигналов.

Для более строгого обоснования равенства (5) докажем следующую теорему.

Теорема 1 *в некоторой окрестности (x-σ,x+σ) точки t=x>0 имеют ограниченное изменение, тогда при σ=1/2 выполняется равенство Парсеваля, а при σ>1/2 неравенство Бесселя.*

Доказательство.

Запишем выражение (3) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} |M(s)|^2\, ds = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} t_1^{s-1} t_2^{s*-1} f(t_1) f(t_2)\, dt_1 dt_2 ds$$

Пусть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} t_1^{s-1} t_2^{s^*-1} f(t_1)\, dt_1 ds = f(t_2)$$

или

$$\int_{0}^{\infty} f\,(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} t_1^{s-1} t_2^{s^{\square}-1}\, ds dt \qquad (6)$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} t_1^{s-1} t_2^{s^*-1} ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t_1^{\sigma+ju-1} t_2^{\sigma-ju-1} d\,(\sigma + ju) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t_1^{s-1} t_2^{s^*-1} ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t_1^{\sigma+ju-1} t_2^{\sigma-ju-1} d\,(\sigma + ju) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t_1^{\sigma-1} t_2^{\sigma-1} t_1^{ju} t_2^{-ju} ds' =$$

$$= t_1^{\sigma-1} t_2^{\sigma-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{julnt_1} e^{-julnt_2} =$$

$$(t_1 t_2)^{\sigma-1} \int e^{ju\left(\ln \overset{\omega}{t}_1 - \ln \overset{\omega_0}{t}_2\right)} ds \ldots$$

Как показано в Приложении 1 (6), равно

$$2\pi j t_2^{\sigma-1} \int_0^{\infty} f\,(t_1) \sigma(lnt_1 - lnt_2) dt_1$$

,

при $\sigma = 1/2$ это равенство выполняется ч.т.д.

Свойство масштабной инвариантности модуля преобразования Меллина. Одно из весьма полезных свойств модуля ПМ функции f(t) состоит в том, что ширина спектра f(t) не зависит от масштаба сигнала. Это свойство было отмечено и использовано в гидроакустике, где доплеровский набег частоты заметно проявляется в изменении масштаба сигнала [2] , а также в оптических преобразованиях [1]. Математически это свойство представляется следующими выкладками:

пусть $f(t) = f(at)$, где $a < R^1, t \,\square\, (0, T_C)$ где R1 — евклидово множество действительных чисел, T_C — длительность f(t), a — масштабный коэффициент. Тогда ПМ запишется как

$$M(s) = \int_0^{T_c/a} f(t)t^{s-1}dt = \int_0^{T_c/a} f(at)t^{s-1}dt\ ,$$

сделав замену переменной y = at, получим

$$a^{-}s \int_0^{T_c} f(y)y^{-s}dy$$

Рассмотрим коэффициент, стоящий перед интегралом

$$a^{-}s = a^{-\sigma - ju} = a^{-\sigma}a^{-ju} = a^{-\sigma} \cdot e^{-ju\ln a} \qquad (7)$$

Модуль (7) равен

$$|a^{-}s| = a^{-\sigma}\sqrt{\cos^2(u\ln a) + \sin^2 u\ln a} = a^{-\sigma} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

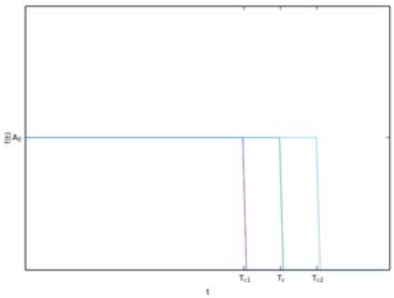
Аргумент (7) запишем

$$arg\left(a^{-s}\right) = arctg\frac{a^{-\sigma}\sin\left(ulna\right)}{a^{-\sigma}\cos\left(ulna\right)} = atctg\left(tg\left(u\ln a\right)\right) = u\ln a$$

Таким образом, модуль ПМ инвариантен к масштабу сигнала f(t), а аргумент зависит от масштабного множителя a. Под инвариантностью модуля ПМ к масштабным изменениям сигнала понимается равенство эффективной ширины амплитудного спектра сигнала при различных T. В преобразовании Фурье частотная ось модуля являлась функцией произведения длительности сигнала и частоты $\omega\omega T_C$, в ПМ ось частот Меллина выступает в качестве функции переменной u.

Пример.

Пусть заданы импульсы прямоугольной формы $f1\left(t\right), f2\left(t\right)$ и $f3\left(t\right)$:



$$f_1(t) = \begin{cases} A_0, t\epsilon\left(0, T_{c1}\right), \\ 0, t\neq\left(0, T_{c1}\right). \end{cases}$$

$$f_2(t) = \begin{cases} A_0, t\epsilon\left(0, T_c\right), \\ 0, t\neq\left(0, T_c\right). \end{cases}$$

$$f_3(t) = \begin{cases} A_0, t\epsilon\left(0, T_{c2}\right), \\ 0, t\neq\left(0, T_{c2}\right). \end{cases}$$

Соответственно ПМ этих сигналов равны

$$M_1(s) = A_0\int_0^{T_{c1}} t^{s-1}\,dt = \frac{A_0t^s}{s}\Big|_0^{T_{c1}} = \frac{A_0}{s}(T_{c1} - 0) = \frac{A_0T_{c1}}{s}$$

$M_2(s) = \frac{A_0 T_c}{s}$

$M_3(s) = \frac{A_0 T_{c2}}{s} M_3(s) = \frac{A_0 T_{c2}}{s}$

Найдем модуль величины 1/s:

$$\left|\frac{1}{s}\right| = \frac{1}{\frac{1}{2}+ju} = \frac{1/2 - ju}{\frac{1}{4}+u^2} = \frac{1}{\sqrt{0.25+u^2}},$$

тогда

$$|M_1(u)| = \frac{A_0 T_{c1}}{\sqrt{0.25+u^2}}; |M_2(u)| = \frac{A_0 T_c}{\sqrt{0.25+u^2}}; |M_3(u)| = \frac{A_0 T_{c2}}{\sqrt{0.25+u^2}}$$

На рис.1 изображены модули этих функций

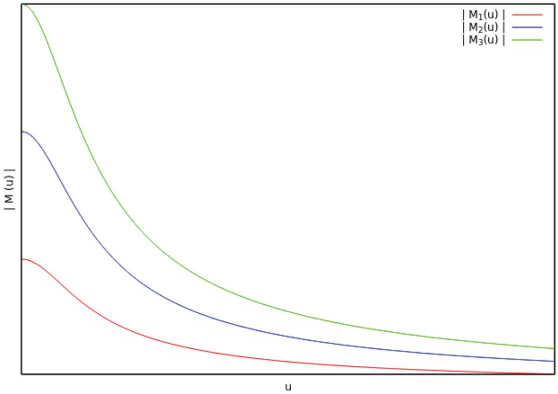


Рис. 1. Графики модулей сигналов с масштабным и коэффициентами 0.5, 1.0, 1.5

Спектры Меллина и их основные свойства:

Изменение масштаба времени:

Пусть $f(t) = f(at)$, тогда

$$M_1(s) = \int_0^\infty f(at)\, t^{s-1} dt = a^{-s} \int_0^\infty f(t)\, t^{s-1} dt = a^{-s} M(s)$$, или

$M_1(u) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{ju\ln(a)} \left|M\left(\frac{1}{2}+ju\right)\right|$, т.е. модуль ПМ инвариантен к масштабу a, а фазовый спектр ПМ зависит от a.

Если

$$f_1(t) = A_0 \sin(\omega_{01} t),\ t\epsilon[0,T],\ f_2(t) = A_0 \sin\left(\omega_{01}\frac{t}{a}\right),\ t\epsilon[0, aT_1],$$

где $A0, \omega 0$ – амплитуда и центральная частота сигнала f(t), то

$$M_1(s) = A_0 \int_0^{T_1} \sin(\omega_{01} t)\, t^{s-1} dt = (\omega_{01})^{-s} A_0 \int_0^{2\frac{\pi}{T_1}} \sin(x)\, x^{s-1} dx,$$

$$M_2(s) = A_0 \int_0^{aT_1} \sin\left(\frac{\omega_{01} t}{a}\right) t^{s-1} dt = a^{-s} M_1(s)$$

В случае отрезков синусоиды $f1(t)$ и $f2(t)$ с произвольным числом периодов (т. е. сигнал не подвергается сжатию [растяжению]), то $|M_1(s)| \to \infty$ $|M_1(s)| \to \infty$, при $\omega_{01} \to \infty, |M(s)| \to 0$ $\omega_{01} \to \infty, |M(s)| \to 0$.

Сдвиг функции во времени:

В данном случае аналитически получить результат непосредственно через ПМ не представляется возможным, поэтому воспользуемся связью ПМ с ПФ. Пусть $f(t) = f1(t - t_0)$, $t\epsilon[t_0, t_0 + T]$, где T — длительность, t_0 — сдвиг f(t), тогда

$$M(u) = \int_{-\ln T}^{\infty} f(e^{\pi}) \frac{1}{\sqrt{e^x + t_0}} e^{-ju\ln(e^{-x}+t_0)} dx \qquad (8)$$

Из (8) следует, что увеличение t_0 приводит к уменьшению $|M(u)|$ (в частности в точке M(0) и растяжению по оси u $|M(u)|$.

Произведение функций:

Предварительно докажем вспомогательное равенство

$$\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} G(1-s)\, t^{s-1} ds = |1 - S = u| = \int_{d-j\infty}^{d+j\infty} G(u)\, t^{-u} dy = g(u)$$

где g(u) — функция обратного ПМ от G(u).

Для функций f(t) и g(t) имеем

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) G(1-s) ds = \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(1-s) \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1} dx ds =$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} f(x) \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} G(1-s) x^{s-1} ds dx = \int_0^{\infty} f(x) g(x) dx.$$

Полагая g(x) = f(x), получим

$$\int_0^{\infty} f(x)\, f^*(x)\, dx = \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)\, F^*(1-s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} |F(s)|^2 ds$$

не что иное, как равенство Парсеваля. Аналогом свертки, играющей фундаментальную роль в теории ПМ, является мультипликативная свертка в пространстве ПМ

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) G(s) t^{-s} ds = \int_0^{\infty} f\left(\frac{t}{\tau}\right) g(\tau) \frac{d\tau}{\tau}, \qquad (9)$$

при F(s) = G(s) имеем

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\left|F\left(s\right)\right|^{2}t^{-s}ds=\int_{0}^{\infty}f\left(\frac{1}{\tau}\right)f\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\tau}, \qquad (10)$$

На практике из условия физической реализуемости, свертка по Меллину (9 , 10) запишется в виде

$$R_M\left(t\right)=\int_{0}^{1}f\left(\frac{t}{\tau}\right)g\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\tau},\text{или}R_M\left(t\right)=\lim_{t\to\infty}\int_{0}^{1}f\left(\frac{t}{\tau}\right)g\left(\tau\right)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Операции интегрирования и дифференцирования сигнала:

Пусть [$f(t) = f^{(n)}(t)$, где n – порядок производной, тогда

$$M\left(s\right)=\left(-1\right)^{n}\left(s-n\right)M\left(s-1\right),\forall n=1,2,3...N.$$

Для n=1 $M(s) = -(s- 1)M(s- 1) = (1 -s)M(s- 1)$, т.е. при дифференцировании ПМ умножается на комплексную частоту, аналогично для интегрирования

$f(t) = \int ...\int f(t_1, t_2, t_3 ... t_n)\, dt1, dt2, dt3 ... dtn$, тогда $M(s) = \frac{1}{s-n}$ $M(s-n)$, где n — кратность интегрирования.

Сумма двух функций Пусть $f(t) = A0 \sin(\omega 0t), t\epsilon[0,\infty)$, тогда

$$M(u)=A_0\sqrt{\frac{\pi}{2}},u\epsilon(-\infty,\infty),\text{а}M(s)=A_0\omega_0^{-s}\Gamma(s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right).$$

Для алгебраической суммы двух синусоид

$f(t) = A01 \sin(\omega 01t) + A02 \sin(\omega 02t), t\epsilon[0,\infty)$, имеем

$M(s) = \Gamma(s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) (A01\omega 01^{-S} + A02\omega 02^{-S})$, тогда

$$M\left(u\right)=\sqrt{\frac{2\pi}{2}}A_{01}\sqrt{T_{01}}\sqrt{1+\frac{y^2}{g^2}+\frac{2\sqrt{y}}{g}\cos\left(ulny\right)},$$

где $y = \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}$; $g = \frac{A_{01}}{A_{02}}$; $T01 = \frac{2\pi}{\omega_{01}}$.

Из выражения модуля ПМ алгебраической суммы двух гармонических сигналов следует, что период повторения огибающей M(u) определяется величиной частотного разноса $\left|\omega_{02}-\omega_{01}\right|$, а постоянная составляющая M(u) – соотношением y.

Здесь же рассмотрим влияние неизвестной начальной фазы $\varphi 0$ гармонического сигнала на модуль ПМ. Пусть $f(t) = A0 \sin(\omega 0t + \phi 0)$, тогда

$$M\left(u\right)=A_0\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{1+\frac{\sin\left(2\varphi_0\right)}{ch\left(\pi u\right)}}, \qquad (11)$$

т. е. Отличие (11) от модуля ПМ с $\varphi 0 = 0$ состоит в наличии мультипликативного множителя

$$\sqrt{1+\frac{\sin\left(2\varphi_0\right)}{ch\left(\pi u\right)}}.$$

Таким образом, при изменении $\varphi 0$ от 0 до π приводит к изменению M(0) от 0 до $A0\sqrt{\pi}$, в то же время с увеличением u это влияние быстро уменьшается при $u \geq 3$ отношение $\frac{\sin(2\phi_0)}{ch(\pi u)}$ менее 0.03.

Смещение спектра:

Преобразование Меллина $f1(t) = f(t)e^{j\omega_0 t}$ в аналитическом виде не существует. Это связано с особенностями ПМ сигнала со сдвигом. Введем функцию, играющую в ПМ аналогичную роль, что и в ПФ комплексная экспонента. Запишем очевидное равенство

$$\int_0^{\infty} f\left(t\right)\eta\left(t\right)t^{s-1}dt = M\left[s+j\omega\right] = M\left[\sigma+j\left(u+\omega\right)\right],$$

где η(t) – искомая функция, отсюда $\eta\left(t\right) = t^{j\omega}$ есть не что иное, как базисная функция ядра ПМ при $\Re\{s\} = \sigma = 0$, некоторые дополнительные свойства, которые потребуются в дальнейших исследованиях и приведены в таблице 1.

№ п/п	**Исследуемая функция f(t)**	**Преобразование Меллина M(s)**	**Примечание**
1	$t^{\alpha}f(t)$	$M(s+\alpha)$	
2	$f\left(\frac{1}{t}\right)$	M(-s)	
3	$f(t^k)$	$k^{-1}M\left(\frac{s}{k}\right)$	k>0
4	$f(t^{-k})$	$k^{-1}M\left(-\frac{s}{k}\right)$	k<0
5	$t^{\beta}f(at^k)$	$k^{-1}a^{\frac{s+\beta}{k}}M\left(\frac{s+\beta}{k}\right)$	a>0, k>0

6	$t^{\beta} f(at^{-k})$	$k^{-1} a^{\frac{s+\beta}{k}} M\left(-\frac{s+\beta}{k}\right)$	a>0, k<0

Библиографический список

1. Шенг И., Асенолт Х. Эксперименты по распознаванию образов с использованием инвариантных дескрипторов Фурье-Меллина // J. Opt. Соц. Ам. 1986. № 3 (6). С. 885-887.
2. Иванов И.В., Довлатян А.Р., Макаров А.М. Основные соотношения для тригонометрически-логарифмических функций в пространстве интегрального преобразования Меллина // Научное обозрение. 2015. № 11. С. 132-136.
3. Макаров А.М., Постовалов С.С., Математическая модель тригонометрически-логарифмических базисных функций преобразования Меллина и их цифровая реализация // Известия ЮФУ. Технические науки. 2018. № 3 (197). С. 22-33.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Теоретическое обоснование выбора реальной части комплексной переменной в пространстве Меллина. Вывод значения реальной части s

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t_1, t_2, s) \int_0^{\infty} f(t_1)\ dt1 ds = f(t_2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t_1, t_2, s)\ ds = \int_{-\infty}^{\infty} t_1^{s-1} \cdot t_2^{s^*-1} ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} t_1^{\sigma+ju-1} t_2^{\sigma-ju-1} d(\sigma + ju)$$

$$= t1^{\sigma-1} t_2^{\sigma-1} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} t_1^{ju} t_2^{-ju} du=$$

$$= t1^{\sigma-1} t_2^{\sigma-1} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{ju(\ln t_1 - \ln t_2)} du,$$

так как

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ju} = \delta(u)$, то равен

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ju} = \delta(u)$, то равен

$\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} e^{ju(\ln t_1 - \ln t_2)} du = 2\pi\delta(\ln t1 - \ln t2)$, отсюда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi(t_1,t_2,s)\,ds\int_0^{\infty}f(t_1)\,dt_1\,ds=$$

$$=2\pi j t_2^{\sigma-1}\int_0^{\infty}t_1^{\sigma-1}\delta(\ln t_1-\ln t_2)\,dt_1=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{обозначив} t_1=e^{x_1},\, x_1=\ln t_1,\\ \\ dx=\frac{dt_1}{t_1}\begin{array}{c}\text{впи}-\infty\\ \\ \text{нпи}+\infty\end{array}\end{array}\right|$$

$$2\pi j t_2^{\sigma-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\sigma\ln x_2}f(x_1)\delta(x_1-\ln x_2)\,dx_1=$$

$$2\pi t_2^{\sigma-1}e^{\sigma\ln x_2}f(e^{\ln x_2})=2\pi j t_2^{\sigma-1}t_2^{\sigma}f(t_2)$$

Равенство достигается при $\sigma=\frac{1}{2}$.