А.М. Макаров, С.С. Постовалов

Моменты распределения случайных комбинированных величин на основе аддитивных и мультипликативных характеристических функций

Для решения многих задач в статистической радиотехнике [1-6] используют моменты распределения случайных величин. При этом возникают математические трудности их нахождения. Особенно это касается распределений, полученных путем их комбинированных преобразований. Избежать указанную трудность возможно на использовании характеристических функций, порождаемых интегральным преобразованием Фурье и Меллина, которые имеют хорошо разработанные таблицы этих преобразований.

В данной работе рассматривается задача нахождения моментов для комбинированных случайных величин с использованием одновременно аддитивных и мультипликативных характеристических функций (АХФ и МХФ) [9-15].

Рассмотрим часто встречающееся преобразование двух статистически независимых случайных величин и:

$$\xi_a = \frac{\xi_1 \xi_2}{{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2} \text{ и}$$

$$\xi_b = \frac{\xi_1 \xi_2}{\sqrt{{\xi_1}^2 + {\xi_2}^2}}.$$

(1) и (2)

Для определенности положим, что заданы две релеевские случайные величины с параметрами.

В работе [15] показано, что МХФ произведения равна

$$A_{12}(s) = (\sigma_1\sigma_2)^{s-1}2^{s-1}\Gamma^2\left(\frac{s+1}{2}\right) \tag{3}$$

Распределение имеет одностороннее экспоненциальное распределение [7, 8], для них АХФ имеет вид

$$\Theta_{12} = \frac{1}{(1-j2\sigma_1 V)(1-j2\sigma_2 V)}. \tag{4}$$

Воспользовавшись обратным ПФ получим плотность распределения вероятностей

$$W_{12}(u) = \beta(e^{-\alpha_2 u} - e^{-\alpha_1 u}),$$

где $\beta = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2} = \frac{1}{2(\sigma_2^2-\sigma_1^2)}$; $\alpha_1 = \frac{1}{2\sigma_1^2}$; $\alpha_2 = \frac{1}{2\sigma_2^2}$.

После несложных преобразований получим

$$W_{12}(u) = \frac{\alpha_1\alpha_2}{2} u\, e^{-\frac{u(\alpha_1+\alpha_2)}{2}} \frac{shu(\alpha_1-\alpha_2)}{\frac{u(\alpha_1-\alpha_2)}{2}}$$

Для МХФ знаменателя получим

$$A_3(s) = 2^{s-1}\frac{\sigma_2^{2s}-\sigma_1^{2s}}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}\Gamma(S)$$

Общее МХФ частного будет иметь вид

$$A_{\xi_a}(s) = A_{12}(s)A_3(2-s) \text{ или}$$

$$A_{\xi_a}(s) = (\sigma_1\sigma_2)^{s-1}\frac{(\sigma_2^4\sigma_2^{-2s}-\sigma_1^4\sigma_1^{-2s})}{\sigma_2^2-\sigma_1^2}\Gamma^2\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma(2-s)$$

Обозначив $\sigma_1 = v\sigma_2$ запишем

$$A_{\xi_a} = \frac{V^{s-1}(1-V^{2(2-s)})}{1-V^2}\Gamma^2\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma(2-s) \tag{5}$$

Так, с учетом того, что начальные элементы равны

$M_k[\xi_a] = A_{\xi_a}(k+1)$, получим

$$M_k[\xi_a] = \frac{V^k(1-V^{2(1-k)})}{1-V^2}\Gamma^2\left(\frac{k+2}{2}\right)\Gamma(1-k) \tag{6}$$

Анализ показывает, что существует лишь первый начальный момент

$$m_1[\xi_a] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Легко найти моменты для обратной величины ξ_a

$$A_{\frac{1}{\xi_a}}(s) = A_3(s)A_{12}(2-s) =$$

$$= \frac{V^{s-1}\left(1-V^{2(2-s)}\right)}{1-V^2}\Gamma(s)\Gamma^2\left(\frac{3-s}{2}\right), \text{ получим} \qquad (7)$$

$$m_k = \frac{V^{1-k-1}\left(1-V^{2(k-1)}\right)}{1-V^2}\Gamma(k+1)\Gamma\left(1-\frac{k}{2}\right), \qquad (8)$$

т.е. существуют только нечетные моменты, например

$$m_1 = 2\pi;\ m_2 = \infty;\ m_3 = 96\pi.$$

Для случайных величин ξ_b МХВ равна

$$A_{\xi_b}(s) = \sigma_2^{3(s-1)} 2^{\frac{3s-5}{2}} \frac{V^{s-1}\left(1-V^{S-3}\right)}{1-V^2}\Gamma^2\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right) \qquad (9)$$

Соответственно для моментов получим

$$m_k[\xi_b] = \sigma_2^{3k} 2^{\frac{3k-2}{2}} \frac{V^{k}\left(1-V^{k-s}\right)}{1-V^2}\Gamma^2\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(1-\frac{k}{2}\right) \qquad (10)$$

В случае обратной величины ξ_b МХФ равны

$$A_{\xi_b}(s) = \sigma_2^{-2\text{ы}} 2^{-\frac{3k-2}{2}} \frac{V^{-1-s}\left(1-V^{-1-s}\right)}{1-V^2}\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma^2\left(1-\frac{k}{2}\right)$$

Соответственно моменты

$$m_k\left[\frac{1}{\xi_b}\right] = \sigma_2^{-2(k-1)} 2^{-\frac{3(k+1)+3}{2}} \frac{V^{-2-k}\left(1-V^{-2-k}\right)}{1-V^2}\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma^2\left(1-\frac{k}{2}\right) (11)$$

Большую роль в анализе и синтезе алгоритмов оптимального обнаружения играет модель аддитивной смеси сигнала со случайной равномерно распределенной в интервале начальной фазой и гауссовского шума с нулевым средним и дисперсией [1-3]:

$$y(t) = s(t,l) + n(t), t\epsilon[0,T_c], \qquad (12)$$

– длительность сигнала; l – параметр сигнала. В работе [7,8] показано, что плотность вероятности y(t) имеет вид

$$W(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2-A_0^2}{2\sigma^2}} \left[I_0\left(\frac{A_0^2}{4\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{yA_0}{\sigma^2}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n\left(\frac{A_0^2}{4\sigma^2}\right) I_{2n}\left(\frac{yA_0}{\sigma^2}\right) \right] \qquad (13)$$

где – амплитуда сигнала; (z) – функция Бесселя первого рода n-го порядка.

Для МХФ запишем

$$A(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A_0^2}{4\sigma^2}} I_0\left(\frac{A_0^2}{4\sigma^2}\right) \int_0^\infty I_0\left(\frac{A_0 y}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} y^{s-1} dy +$$

$$+\frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A_0^2}{4\sigma^2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n\left(\frac{A_0^2}{4\sigma^2}\right) \int_0^\infty I_{2n}\left(\frac{A_0 y}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} y^{s-1} dy =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A_0^2}{4\sigma^2}} I_0\left(\frac{A_0^2}{4\sigma^2}\right) \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{s-1} \sigma^{s+1}}{A_0} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) e^{-\frac{A_0^2}{4\sigma^2}} \cdot$$

$$\cdot M_{\frac{s}{2}-\frac{1}{2},0}\left(\frac{A_0^2}{2\sigma^2}\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n\left(\frac{A_0^2}{4\sigma^2}\right) \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{s-1} \sigma^{s+1}}{A_0} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2n+s}{2}\right)}{\Gamma(2n+1)} e^{-\frac{A_0^2}{4\sigma^2}} \cdot M_{\frac{s}{2}-\frac{1}{2},n}\left(\frac{A_0^2}{2\sigma^2}\right). \qquad (14)$$

Обозначим отношение, запишем функцию Макдональда

$$M_{\frac{s}{2}-\frac{1}{2},0}(q^2) = q e^{-\frac{q^2}{2}} {}_1F_1\left(1 - \frac{s}{2}; 1; q^2\right),$$

$$M_{\frac{s}{2}-\frac{1}{2},n}(q^2) = q^{1+2n} e^{-\frac{q^2}{2}} {}_1F_1\left(n + 1 - \frac{s}{2}; 2n + 1; q^2\right)$$

получим

$$A(S) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} \Bigg[I_0\left(\frac{q^2}{2}\right) \frac{(\sqrt{2}\sigma)}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) e^{-\frac{q^2}{2}} \cdot$$

$$ {}_1F_1\left(1 - \frac{s}{2}; 1; q^2\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n\left(\frac{q^2}{2}\right) \frac{(\sqrt{2}\sigma)^s}{2} e^{-q^2} \cdot$$

$$\frac{\Gamma(n+\frac{s}{2})}{\Gamma(2n+1)} {}_1F_1\left(n + 1 - \frac{s}{2}; 2n + 1; q^2\right) \Bigg] \qquad (15)$$

где – вырожденная гипергеометрическая функция.
С учетом очевидных равенств

$$\Gamma\left(n + \frac{s}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{s}{2}\right)_n, \left(\frac{s}{2}\right)_n = \frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{2}+2\right)$$

символ Похгамера

$$\Gamma(2n+1) = n!!, n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots$$

имеем

$$A(s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}} \left[I_0\,(q^2/2)\,\frac{\left(\sqrt{2}\sigma\right)^s}{2}\,\Gamma\,(s/2)\,e^{-q^2} \cdot\right.$$

$$\cdot {}_1F_1\left(1-\tfrac{s}{2};1;q^2\right) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n\left(\tfrac{q^2}{2}\right)\frac{\left(\sqrt{2}\sigma\right)^\sigma}{2}e^{-q^2}\cdot$$

$$\left.\cdot\ \frac{\Gamma(s/2)\left(\frac{s}{2}\right)_n}{n!!}\ {}_1F_1\left(n+1-\tfrac{s}{2};2n+1;q^2\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2}}\Gamma(s/2)e^{-q^2}\frac{\left(\sqrt{2}\sigma\right)^s}{2}\cdot$$

$$\cdot\left[I_0\left(\tfrac{q^2}{2}\right)\ {}_1F_1\left(1-\tfrac{s}{2};1;q^2\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n\left(\tfrac{q^2}{2}\right)\frac{\left(\frac{s}{2}\right)_n}{n!!}\cdot\right.$$

$$\left.{}_1F_1\left(n+1-\tfrac{s}{2};2n+1;q^2\right)\right] \tag{16}$$

Соответственно начальные моменты равны

$$m_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\Gamma\left(\tfrac{k+1}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}q^2}\left[I_0\left(\tfrac{q^2}{2}\right)\ {}_1F_1\left(1-\tfrac{k+1}{2};1;q^2\right)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n\left(\tfrac{q^2}{2}\right)\frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)_n}{n!!}\ {}_1F_1\left(n+1-\tfrac{k+1}{2};2n+1;q^2\right)\right] \tag{17}$$

Проведенный в работе анализ показал, что совместное использование аддитивной и мультипликативной характеристических функций приводит к существенному упрощению нахождения вероятностных характеристик сложных преобразований n-случайных величин.

Следует отметить, что полученный результат также позволяет заключить о возможности измерения важнейшей характеристики, влияющей на качество обнаружения сигналов – отношение сигнал\шум, без отделения сигнала от шума.

Библиографический список

1. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Советское радио, 1956. 152 с.
2. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т. 1. М.: Советское радио, 1972. 744 с.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. В 3 кн. Кн. 2. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Советское радио, 1975. 392 с.
4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. В 3 кн. Кн. 3. М.: Советское радио, 1976. 288 с.
5. Лопухов Ю.А., Макаров А.М. Мультипликативная характеристическая функция для анализа эффективности радио-технических устройств // Информационное противодействие угрозам терроризма. 2005. № 3. С. 89.
6. Макаров А.М. Введение в теорию и приложения характеристических функ-

ций, порождаемых преобразованием Меллина // Информационное противодействие угрозам терроризма. 2005. № 3. С. 107-108.
7. Макаров А.М. Взаимосвязь автокорреляционной функции стационарных случайных процессов в базисе преобразования Фурье со спектральной плотностью мощности в базисе преобразования Меллина (аналог теоремы Винера-Хинчина) // Известия ЮФУ. Технические науки. 2014. № 11 (160). С. 52-57.
8. Макаров А.М. Методика расчета энергетического подавления излучений радиоканала от несанкционированного съема информации // Информационное противодействие угрозам терроризма. 2005. № 3. С. 86.
9. Макаров А.М., Евдокимов О.Ю., Дейнеко М.С. Введение в математический аппарат характеристической функции Меллина // Известия ЮФУ. Технические науки. 2002. № 1 (24). С. 3-7.
10. Макаров А.М., Ермаков А.С. Оптимальный согласованный фильтр для обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной корреляционной функцией // Известия ЮФУ. Технические науки. 2015. № 11 (172). С. 42-54.
11. Макаров А.М., Лопухов Ю.А. Метод оценки эффективности алгоритмов обнаружения сигналов на фоне не экспоненциального распределенных помехах // Информационное противодействие угрозам терроризма. 2005. № 3. С. 87-88.
12. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптации информационных систем. М.: Советское радио, 1977. 432 с.